THÉORIE DES GROUPES 2024–25, FEUILLE DE SOLUTIONS 13

Exercice 1. À faire soi-même. Demandez à l'assistant si quelque chose n'est pas clair.

Exercice 2. Nous allons montrer qu'un foncteur $F : BH \to BG$ correspond précisément à un homomorphisme de groupes $H \to G$. On peut le prouver formellement en construisant une bijection

$$\mathrm{Fun}(BH, BG) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}}(H, G).$$

Puisque l'ensemble des objets de BG est un singleton, c'est-à-dire

$$\mathrm{Ob}(BG) = \{\bullet_G\},$$

et de même pour BH, les données d'un foncteur $F : BH \to BG$ sont exactement :

(1) une fonction

$$F_{\mathrm{ob}} : \{\bullet_H\} \to \{\bullet_G\},$$

qui envoie nécessairement $\bullet_H \mapsto \bullet_G$;

(2) une fonction

$$F_{\bullet_H,\bullet_H} : \mathrm{Mor}_{BH}(\bullet_H, \bullet_H) \to \mathrm{Mor}_{BG}(\bullet_G, \bullet_G),$$

telle que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

(a) $F_{\bullet_H,\bullet_H}(\mathrm{Id}_{\bullet_H}) = \mathrm{Id}_{\bullet_G}$;

(b) $F_{\bullet_H,\bullet_H}(g \circ f) = F_{\bullet_H,\bullet_H}(g) \circ F_{\bullet_H,\bullet_H}(f)$ pour tous $f, g \in \mathrm{Mor}_{BH}(\bullet_H, \bullet_H)$.

Or, par définition,

$$\mathrm{Mor}_{BH}(\bullet_H, \bullet_H) = H \quad \text{et} \quad \mathrm{Mor}_{BG}(\bullet_G, \bullet_G) = G,$$

de sorte que la fonction $F_{\bullet_H,\bullet_H}$ est simplement une application

$$F_{\bullet_H,\bullet_H} : H \to G.$$

Nous affirmons que cette application est en fait un homomorphisme de groupes. Comme l'identité dans BH de l'objet $\bullet_H$ est donnée par

$$\mathrm{Id}_{\bullet_H} = e_H \in \mathrm{Mor}_{BH}(\bullet_H, \bullet_H),$$

et de même dans BG, la condition précédente montre que F préserve les identités :

$$F_{\bullet_H,\bullet_H}(e_H) = e_G.$$

De plus, puisque la composition dans BH est donnée par la multiplication dans H, et de même dans BG, la condition ci-dessus implique que $F_{\bullet_H,\bullet_H}$ préserve la composition : pour tous $h, h' \in H$,

$$F_{\bullet_H,\bullet_H}(h \cdot h') = F_{\bullet_H,\bullet_H}(h \circ h') = F_{\bullet_H,\bullet_H}(h) \cdot F_{\bullet_H,\bullet_H}(h').$$

Ainsi, $F_{\bullet_H,\bullet_H}$ est un homomorphisme de groupes. La bijection est définie par

$$(F : BH \to BG) \longmapsto (F_{\bullet_H,\bullet_H} : H \to G).$$

L'inverse envoie un homomorphisme de groupes $f : H \to G$ sur le foncteur $F : BH \to BG$ qui, sur les objets, envoie $F(\bullet_H) = \bullet_G$, et sur les morphismes

$$F_{\bullet_H,\bullet_H}(h) = f(h).$$

Le fait que f préserve l'élément neutre implique que F satisfait la condition a), tandis que le fait que f préserve la multiplication implique que F préserve la composition.

Exercice 3. Nous montrons qu'un tel foncteur n'existe pas. Raisonnons par l'absurde. Observons que nous disposons d'homomorphismes de groupes

$$f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to S_3, \quad \bar{1} \mapsto (12)$$

et

$$g : S_3 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \sigma \mapsto \mathrm{sgn}(\sigma).$$

Notons que g est l'homomorphisme signature, qui envoie une permutation paire sur $\bar{0}$ et une permutation impaire sur $\bar{1}$.

De plus, on voit que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}.$$

Si Z est un foncteur ayant la propriété qu'au niveau des objets, Z associe à un groupe son centre, alors on a

$$Z(g \circ f) = Z(\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}) = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}.$$

D'autre part, comme on aurait

$$Z(S_3) = \{e\},$$

on obtient que $Z(g) \circ Z(f)$ est la composition

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{Z(f)} \{e\} \xrightarrow{Z(g)} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

qui est l'homomorphisme trivial. Ainsi,

$$Z(g \circ f) \neq Z(g) \circ Z(f),$$

et donc Z n'est pas un foncteur.

Exercice 4.
($\Rightarrow$) Supposons que f soit un épimorphisme. Raisonnons par l'absurde et supposons que f ne soit pas surjective. Il existe alors un élément $y_0 \in Y$ tel que $y_0 \notin \mathrm{Im}(f)$. Posons

$$Z := \{0, 1\}$$

et définissons des fonctions $g_1, g_2 : Y \to Z$ par

$$g_1(y) = 0 \quad \text{pour tout } y \in Y,$$

$$g_2(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = y_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $g_1 \neq g_2$. Cependant, pour tout $x \in X$, on a $f(x) \neq y_0$, et donc

$$g_1(f(x)) = g_2(f(x)) = 0.$$

Ainsi,

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f,$$

ce qui contredit l'hypothèse que f est un épimorphisme. Par conséquent, f doit être surjective.

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que f soit surjective. Soient $g_1, g_2 : Y \to Z$ telles que

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f.$$

Pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. On obtient alors

$$g_1(y) = g_1(f(x)) = g_2(f(x)) = g_2(y).$$

Ainsi $g_1 = g_2$, et donc f est un épimorphisme.
(2) $\Rightarrow$ Supposons que f soit un monomorphisme. Supposons par l'absurde que f ne soit pas injective. Il existe alors deux éléments distincts $x_1, x_2 \in X$ tels que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Soit $Z := \{\bullet\}$ un ensemble singleton, et définissons des fonctions $h_1, h_2 : Z \to X$ par

$$h_1(\bullet) = x_1, \qquad h_2(\bullet) = x_2.$$

Alors $h_1 \neq h_2$, mais

$$f \circ h_1 = f \circ h_2,$$

ce qui contredit l'hypothèse que f est un monomorphisme. Par conséquent, f doit être injective.

(2) $\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que f soit injective. Soient $h_1, h_2 : Z \to X$ telles que

$$f \circ h_1 = f \circ h_2.$$

Pour tout $z \in Z$, on a

$$f(h_1(z)) = f(h_2(z)).$$

Comme f est injective, il s'ensuit que $h_1(z) = h_2(z)$ pour tout $z \in Z$, et donc $h_1 = h_2$. Ainsi, f est un monomorphisme.

Exercice 5. Par définition, un *pushout* de (f, f') consiste en un objet P muni de morphismes

$$i : Y \to P, \qquad i' : Y' \to P$$

tels que le carré

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f"'] & Y' \arrow[d, "i'"] \\ Y \arrow[r, "i"'] & P \end{tikzcd}$$

commute, c'est-à-dire

$$i \circ f = i' \circ f',$$

et qui est universel pour cette propriété : pour tout objet Z et tous morphismes

$$g : Y \to Z, \qquad g' : Y' \to Z$$

satisfaisant $g \circ f = g' \circ f'$, il existe un unique morphisme $u : P \to Z$ tel que

$$u \circ i = g, \qquad u \circ i' = g'.$$

Supposons maintenant que (P, i, i') et (P', j, j') soient deux pushouts du diagramme donné. Nous allons montrer que P et P' sont isomorphes. Puisque (P', j, j') est un pushout et que les morphismes

$$i : Y \to P, \qquad i' : Y' \to P$$

satisfont $i \circ f = i' \circ f'$, la propriété universelle de P' fournit un unique morphisme

$$\alpha : P' \to P$$

tel que

$$\alpha \circ j = i, \qquad \alpha \circ j' = i'.$$

De même, puisque (P, i, i') est un pushout et que les morphismes

$$j : Y \to P', \qquad j' : Y' \to P'$$

satisfont $j \circ f = j' \circ f'$, il existe un unique morphisme

$$\beta : P \to P'.$$

tels que

$$\beta \circ i = j, \qquad \beta \circ i' = j'.$$

Nous montrons maintenant que α et β sont inverses l'un de l'autre. Considérons la composition

$$\alpha \circ \beta : P \to P.$$

On a

$$(\alpha \circ \beta) \circ i = \alpha \circ (\beta \circ i) = \alpha \circ j = i,$$

et de même

$$(\alpha \circ \beta) \circ i' = \alpha \circ (\beta \circ i') = \alpha \circ j' = i'.$$

Par la propriété universelle du pushout (P, i, i'), il existe un unique endomorphisme de P possédant cette propriété. Comme le morphisme identité id_P satisfait aussi

$$\mathrm{id}_P \circ i = i, \qquad \mathrm{id}_P \circ i' = i',$$

il s'ensuit que

$$\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_P.$$

Un raisonnement analogue montre que

$$\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{P'}.$$

Par conséquent, $\alpha : P' \to P$ est un isomorphisme, d'inverse $\beta : P \to P'$. Ainsi, le pushout, s'il existe, est unique à isomorphisme près.

Exercice 6.
(a) L'observation clé est que, étant donné un élément $x \in X$, on obtient toujours une application $G \to X$, $g \mapsto g \cdot x$, et celle-ci doit induire une fonction $G \to H(Y)$,

$$g \mapsto g \cdot f(x) = f(g \cdot x).$$

Nous définissons donc

$$H(Y) := \{\, \text{applications } \varphi : G \to Y \,\},$$

avec l'action de G donnée par

$$g \cdot \varphi := \big(h \mapsto \varphi(h \cdot g)\big).$$

Il est facile de vérifier que cela définit un G-ensemble. Étant donnée une application $f : F(X) \to Y$ entre ensembles, on peut définir

$$X \to H(Y), \qquad x \mapsto \big(h \mapsto f(h \cdot x)\big).$$

Nous omettons la vérification que ceci est un morphisme de G-ensembles.

Réciproquement, étant donné un morphisme de G-ensembles $m : X \to H(Y)$, on peut définir

$$F(X) \to Y, \qquad x \mapsto m(x)(e),$$

où e désigne l'élément neutre de G.

Nous omettons à nouveau la vérification que ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre.

(b) Nous affirmons que l'adjoint à droite est $Y \mapsto Y^G$, l'ensemble des points fixes de Y. En effet, supposons qu'il existe une application $f : \mathrm{Triv}(X) \to Y$, alors on a

$$f(\mathrm{Triv}(X)) \subset Y^G$$

puisque

$$g \cdot f(x) = f(g \cdot x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Réciproquement, une application d'ensembles $X \to Y^G$, composée avec l'inclusion $Y^G \hookrightarrow Y$, fournit une application $\mathrm{Triv}(X) \to Y$ de G-ensembles. Nous omettons la vérification que ces constructions sont mutuellement inverses.